

SISTEMAS DE ECUACIONES Y MATRICES

FASE DE CAPACITACION Y
FASE DE ACTUALIZACION MATEMATICA

1985-1986

PROGRAMA NACIONAL
DE FORMACION
Y ACTUALIZACION
DE PROFESORES
DE MATEMATICAS

SEP

SUBSECRETARIA
DE EDUCACION
SUPERIOR E
INVESTIGACION
CIENTIFICA

SISTEMAS DE ECUACIONES Y MATRICES

FASE DE CAPACITACION Y
FASE DE ACTUALIZACION MATEMATICA

1985-1986

**PROGRAMA NACIONAL
DE FORMACION
Y ACTUALIZACION
DE PROFESORES
DE MATEMATICAS**

SEP

SUBSECRETARIA
DE EDUCACION
SUPERIOR E
INVESTIGACION
CIENTIFICA

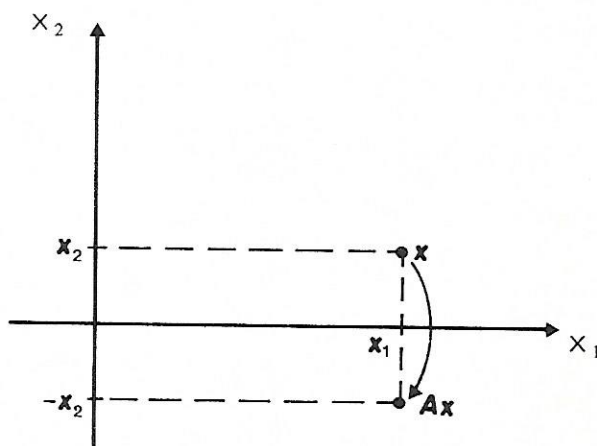
TRANSFORMACIONES

En este Capítulo, veremos un tipo particular de funciones. Relacionaremos también este tipo de funciones con el concepto de matriz.

Introduciremos la relación de la que se habla en el párrafo anterior con dos ejemplos, el primero tratará sobre una función particular de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ y el segundo el de una matriz A de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 1.

Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $f(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$; analicemos geométricamente el comportamiento de la función. Nótese que la gráfica de f está en $\mathbb{R}^4$ por ser $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, por ello, es más fácil analizar el comportamiento de la función. Así pues, pictóricamente se tiene



Ejemplo 2.

$$\text{Sea } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

un elemento del espacio vectorial* real $\mathbb{R}^2$.

Si a cada elemento $x \in \mathbb{R}^2$ le asociamos el elemento Ax , de hecho estamos construyendo una función $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que a cada

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

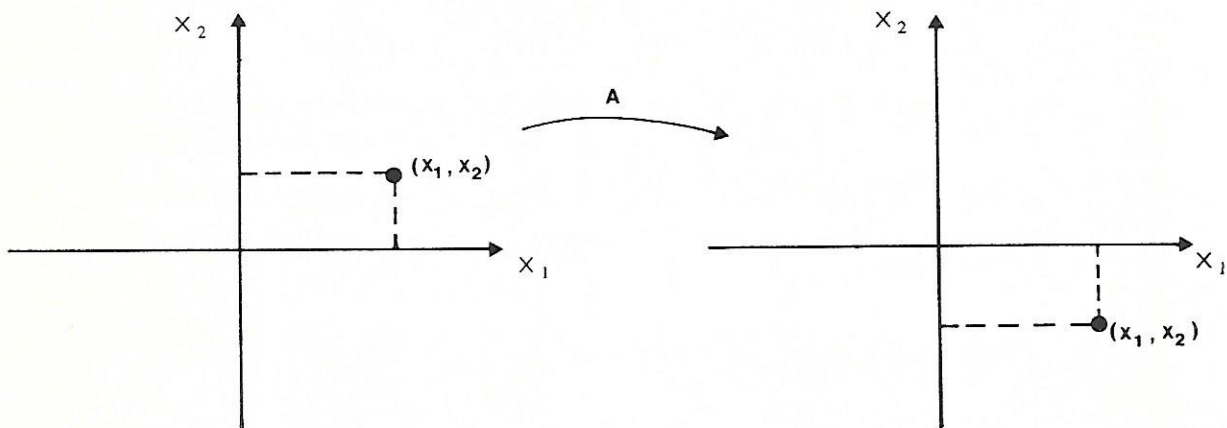
le asociamos el elemento

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

es decir,

$$Ax = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

pictóricamente se tiene

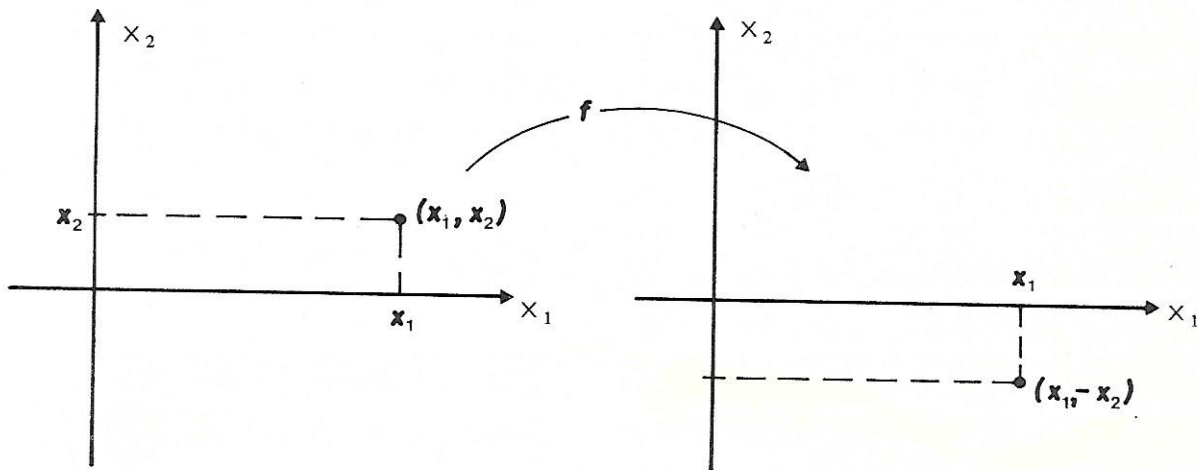


* De ahora en adelante, denotaremos a $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$ o $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^3$ siempre y cuando a $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ los consideramos con la estructura de espacio vectorial; sus puntos los denotaremos como (x_1, x_2) y (x_1, x_2, x_3) respectivamente. A cada punto de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ se le puede asociar un vector y viceversa. La definición de espacio vectorial se encuentra en el anexo del capítulo 6.

Hemos analizado que el comportamiento de las dos funciones es similar; de hecho, se ha introducido el concepto de función en términos matriciales (o producto de matrices).

Definición. Una transformación es una función que va de un espacio en sí mismo. Si la función se puede representar por medio de una matriz, entonces está transformación obliga a que la matriz sea cuadrada.

NOTA: En algunos textos, la transformación se dibuja en el mismo espacio. Por ejemplo, para la transformación del ejemplo 2, se dibuja solamente



Ejemplo 3.

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- ¿Es A una transformación?
- ¿Si la respuesta es afirmativa, de qué espacio?
- ¿Qué características tiene la transformación?.

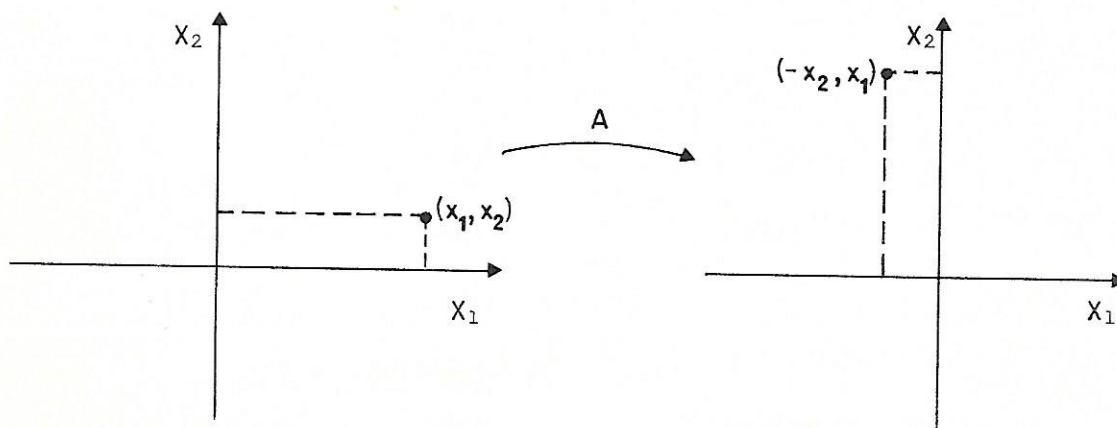
Resolución:

La matriz A puede representar una transformación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ por tener dos líneas y dos columnas. Es decir, si $x \in \mathbb{R}^2$, a cada x se le asocia el elemento Ax . Esto responde a los incisos a) y b).

Sea $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ un elemento de $\mathbb{R}^2$.

$$Ax = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

de ahí que cada elemento (x_1, x_2) de $\mathbb{R}^2$ se le asocia el elemento $(-x_2, x_1)$. En forma pictórica,



Se puede inducir que la transformación es una rotación de 90° .

Al punto $(0, 0)$ lo transforma en el $(0, 0)$. Es decir, el $(0, 0)$ es un punto fijo y además el único bajo esta transformación.

Definición. Un punto fijo x de una transformación es aquel que cumple

$$f(x_0) = x_0$$

Si es en forma matricial: $Ax_0 = x_0$

Ejemplo 4.

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Si $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, ¿existen puntos fijos

de esta transformación?

Resolución:

Para que x sea punto fijo, debe de cumplir que $Ax = x$. Dicho de otra manera, debe cumplirse lo siguiente

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De ahí, se obtiene el sistema

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = x_1 \\ 0 = x_2 \end{array} \right\}$$

esto nos indica que el valor de x_1 puede ser cualquiera, y el de x_2 debe ser cero. Así pues, cada punto sobre el eje de las x es un punto fijo. Se puede decir que el eje de las x es una recta fija.

La característica de esta transformación es que cualquier punto (x_1, x_2) es transformado en $(x_1, 0)$. Es decir, es la transformación proyección.

Definición: Una recta se dice *fija* con respecto a una transformación si cada uno de sus puntos es un punto fijo. Se dice *recta invariante* si cada uno de sus puntos bajo la transformación es un elemento de la recta en el conjunto imagen.

NOTA: Sólo estaremos interesados en las rectas que pasan por el origen.

Ejemplo 5.

$$\text{Sea } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- a). ¿Tiene la transformación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ puntos y rectas fijas?
- b). ¿Tiene rectas invariantes?

Resolución:

Sea $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Para tener puntos fijos se debe cumplir

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

es decir,

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 = x_1 \\ 0 = x_2 \end{array} \right\}$$

esto se cumple si y sólo si

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array} \right\}$$

Esto implica que sólo hay un punto fijo, el $(0, 0)$; además, que no hay rectas fijas, pero se puede verificar de la siguiente manera

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ mx_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ mx_1 \end{bmatrix}$$

esto da lugar al sistema

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 = x_1 \\ 0 = mx_1 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 = 0 \text{ es el \u00fanico punto que cumple el sistema,}$$

lo cual indica que no hay recta fija.

Veamos si hay rectas invariantes, es decir que

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ mx_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ my_1 \end{bmatrix}$$

esto implica que

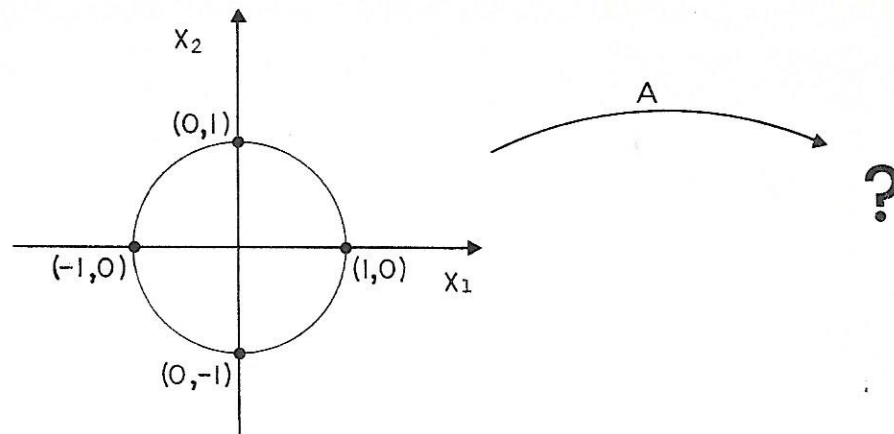
$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 = y_1 \\ 0 = my_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{que si } x_1 \neq 0, y_1 \neq 0 \text{ y } m = 0.$$

es decir, que la recta con pendiente $m = 0$ es la \u00fanica recta invariante. Cualquier punto en el eje de las x , por ejemplo, $(x_1, 0)$ se transforma en el $(2x_1, 0)$. Se puede decir que la -- recta horizontal es elongada bajo la transformaci\u00f3n.

Ejemplo 6.

$$\text{Sea } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y c el c\u00edrculo centrado de radio uno en $\mathbb{R}^2$. \u00bfCu\u00e1l es la imagen del c\u00edrculo bajo la transformaci\u00f3n?

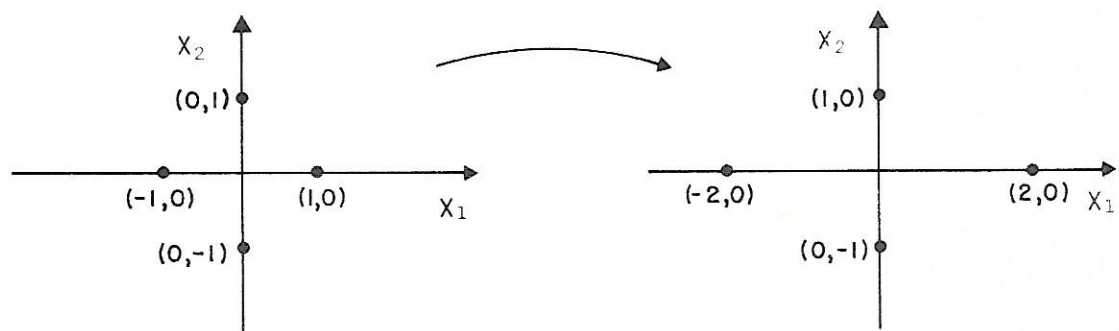


Resolución:

Cualquier punto (x_1, x_2) que se encuentra sobre el círculo unitario (de radio igual a uno), debe cumplir que $x_1^2 + x_2^2 = 1$ puesto que:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Los puntos $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ y $(0, -1)$ bajo la transformación son $(2, 0)$, $(0, 1)$, $(-2, 0)$ y $(0, -1)$, respectivamente



puesto que la transformación, en términos intuitivos, "alarga --- las abscisas de manera continua", esperaríamos un "alargamiento del círculo". Es decir, esperaríamos que el círculo bajo la --- transformación fuese una elipse.

¿Qué elipse?, la que pasa por los puntos antes señalados que es

$$\frac{y_1^2}{4} + \frac{y_2^2}{1} = 1$$

escrita de otra manera.

$$y_1^2 + 4y_2^2 = 4$$

La transformación toma un punto (x_1, x_2) sobre el círculo y lo transforma en el punto $(2x_1, x_2)$. Así pues, debemos probar que el punto $(2x_1, x_2)$ satisface la ecuación de la elipse tomando en cuenta que $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Partiremos del primer miembro de la ecuación de la elipse y demostraremos que es igual a 4,

$$(2x_1)^2 + 4(x_2)^2 = 4x_1^2 + 4x_2^2 = 4(x_1^2 + x_2^2) = 4$$

por lo tanto, la imagen del círculo unitario bajo la transformación es una elipse cuya ecuación es

$$y_1^2 + 4y_2^2 = 4$$

Una manera más corta, dejando de lado la parte intuitiva, de encontrar la ecuación siguiendo un proceso algebraico es como sigue.

La relación entre los puntos del dominio (x_1, x_2) y los del contra dominio (y_1, y_2) es

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

es decir,

$$2x_1 = y_1 \quad y \quad x_2 = y_2$$

puesto que los puntos (x_1, x_2) que nos interesan son los que cumplen con $x_1^2 + x_2^2 = 1$, substituyendo los valores correspondientes en términos de y_1 y y_2 se obtiene

$$\left(\frac{y_1}{2}\right)^2 + (y_2)^2 = 1$$

o sea

$$\frac{y_1^2}{4} + \frac{y_2^2}{1} = 1$$

Ejercicio: Analizar si hay puntos fijos, rectas fijas, rectas invariantes del ejemplo anterior.

Definición: Un plano se dice *fijo* con respecto a una transformación si cada uno de sus puntos es un punto fijo. Se dice *plano invariante* si cada uno de sus puntos bajo la transformación es un elemento del plano en el conjunto imagen.

NOTA: Sólo estaremos interesados en las rectas y planos que pasan por el origen.

Ejemplo 7.

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Una transformación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$.

- a) ¿Existen rectas fijas bajo la transformación?
- b) ¿Existen rectas invariantes bajo la transformación?
- c) ¿Existen planos fijos bajo la transformación?
- d) ¿Existen planos invariantes bajo la transformación?
- e) ¿Cuál es la imagen de la esfera centrada unitaria de $\mathbb{R}^3$, bajo la transformación?

Resolución:

Si demostramos que existe por lo menos un plano fijo, ello respondería a las preguntas a) y c).

La transformación A va de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$, si x_1, x_2, x_3 , designan los ejes cartesianos en ese orden, al analizar la transformación se puede inducir que las primeras dos coordenadas no sufren cambio alguno bajo la transformación. Así pues, proponemos al plano $X_1 - X_2$ como candidato.

Cada punto del plano $X_1 - X_2$ en $\mathbb{R}^3$ es de la forma $(x_1, x_2, 0)$ y bajo la transformación debe permanecer fijo; verifiquémoslo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

por lo tanto, el plano $X_1 - X_2$ es fijo y cada recta que esté sobre este plano, es fija, ya que cada punto de la recta es fijo.

Para responder b), tomemos la recta que coincide con el eje X_3 . Todo punto de esa recta es de la forma $(0, 0, k)$, con $k \in \mathbb{R}$; bajo la transformación

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3k \end{bmatrix}$$

se tiene el elemento $(0, 0, 3k)$ que también pertenece a la recta. De --- hecho, cualquier recta perpendicular al plano $X - Y$ (o paralela al eje X_3) es invariante.

Con lo anterior, no es difícil pensar en que hay una infinidad de planos invariantes. Cualquier plano perpendicular al plano $X_1 - X_2$ es invariante, aunque para responder a la pregunta d), bastaría con encontrar por lo menos uno. Con demostrar que el plano $X_1 - X_3$ ó $X_2 - X_3$ es perpendicular a $X_1 - X_2$ quedaría contestada la pregunta.

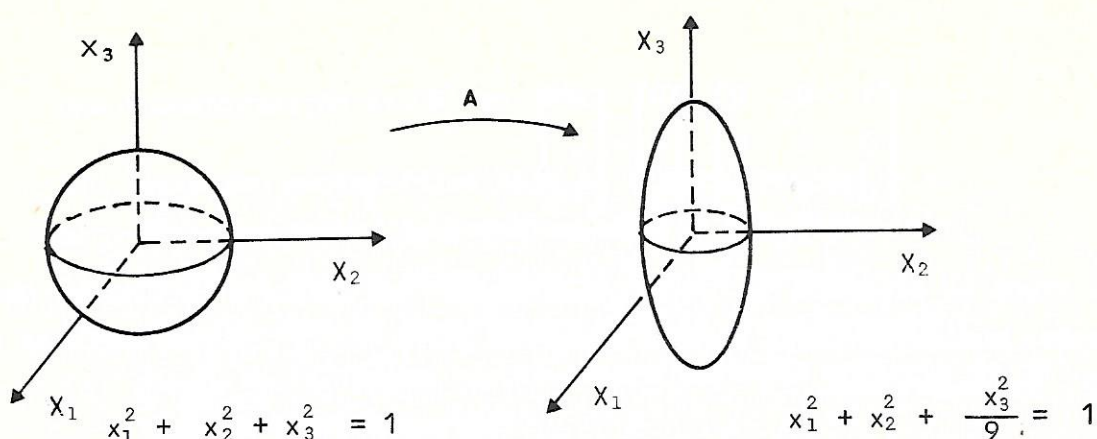
Tomemos el plano $X_1 - X_3$, por tanto sus puntos son de la forma $(k_1, 0, k_3)$ con $k_1, k_3 \in \mathbb{R}$. Bajo la transformación obtenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ 0 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ 0 \\ 3k_3 \end{bmatrix}$$

puesto que $(k_1, 0, 3k_3)$ es nuevamente un punto del plano $X_1 - X_3$, se tiene que $X_1 - X_3$ es un plano invariante.

Ahora pasemos a la pregunta e), veamos la imagen de algunos puntos. La intersección de la esfera unitaria con los ejes X_1, X_2, X_3 , es en los puntos $(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1); (-1, 0, 0); (0, -1, 0)$ y $(0, 0, -1)$ cuyas imágenes bajo la transformación son $(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 3); (-1, 0, 0); (0, -1, 0)$ y $(0, 0, -3)$ respectivamente.

"El alargamiento del eje X_3 " nos permite predecir que la imagen de la esfera será un elipsoide



Para verificarlo, calculemos las imágenes de los puntos x_1, x_2, x_3 que cumplen con $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$; entonces,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Los puntos $(x_1, x_2, 3x_3)$ deben cumplir con la ecuación del elipsoide, o sea

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + \frac{(3x_3)^2}{9} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

NOTA: Análogamente como en el ejemplo 5, se puede usar otro método para llegar a la ecuación del elipsoide.

Ahora veremos otro ejemplo, en donde la predicción es más difícil, y se hace patente el uso inmediato de algún proceso algebraico para saber cuál es la imagen de, por ejemplo, un círculo unitario centrado en el origen.

Ejemplo 8.

Sea la transformación $M: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

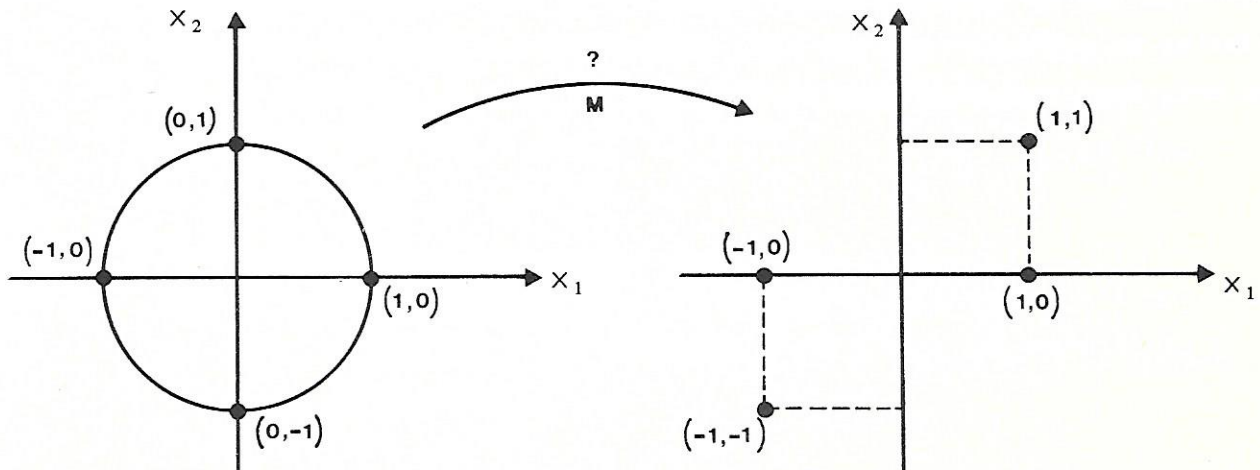
Encontrar la imagen del círculo unitario centrado bajo la transformación.

Resolución.

Sea $x' = [x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2$

$$Mx = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

La intersección del círculo unitario con los ejes cartesianos nos da los puntos $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ y $(0, -1)$; sus imágenes bajo la transformación son respectivamente $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, 0)$ y $(-1, -1)$ o sea



podríamos predecir algún tipo de curva que pasa por los puntos imagen, pero en este caso es menos probable el encontrarla. Sin embargo, siguiendo algún proceso algebraico se determina el tipo de curva que pasa por esos puntos.

Dado que

$$Mx = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

donde

$$y_1 \in Y_1 \quad y \quad y_2 \in Y_2$$

se forma el sistema

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y_1 - x_2 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 - y_2 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{array}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación $x_1^2 + x_2^2 = 1$ se tiene

$$(y_1 - y_2)^2 + (y_2)^2 = 1$$

por lo tanto

$$y_1^2 - 2y_1y_2 + 2y_2^2 = 1$$

entonces, la imagen del círculo unitario es una cuadrática cuyo centro coincide con el origen. Dicha cuadrática es una elipse cuyos ejes principales no coinciden con los ejes cartesianos (en los capítulos 7 y 8 se precisará como graficar tales curvas).

PROBLEMAS PROPUESTOS

- 1.- En cada uno de los siguientes ejercicios, describir geométicamente (graficando la imagen de algunos puntos representativos) la transformación determinada por A.

$$a) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$b) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 2.- En cada uno de los ejercicios 1, 2 y 3 determinar:

- a) Si hay puntos y rectas fijas
- b) Si hay rectas invariantes

En caso de que las (los) haya, trazar algunas (os) de ellas (ellos).

3.- Sea la transformación $x \rightarrow Mx$ con $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

¿Cuál es la imagen del círculo unitario bajo esta transformación?

4.- Dada la transformación $x \rightarrow Ax$; $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

¿Cuál es la imagen del círculo unitario?

5.- Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

interpretar geoméricamente cada una de las transformaciones determinadas por esas matrices, y comprobar que $A \circ B$ corresponde a la transformación compuesta obtenida al aplicar primero B y después A .

6.- Con A y B como en el problema anterior, interprete $B \circ A$ como una transformación y note geoméricamente la diferencia.

7.- Comprobar que la transformación determinada por la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

es un giro de 45° en el sentido de las manecillas del reloj, calcular la matriz inversa y describir geoméricamente la transformación determinada por esta matriz.

- 8.- Probar que la transformación $x \mapsto Mx$, donde $M = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, manda (transforma) puntos colineales en puntos colineales.

9.- Dada la transformación $x \mapsto Ax$, donde $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

- a) ¿Hay planos fijos bajo esta transformación?
- b) ¿Existen planos invariantes bajo esta transformación?
- c) ¿Cuál es la imagen de la esfera unitaria centrada en el origen bajo esta transformación?

10.- Dada la transformación $x \mapsto Ax$, donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- a) ¿Existen planos fijos bajo esta transformación?
- b) ¿Existen planos invariantes bajo esta transformación?
- c) ¿Cuál es la imagen de la esfera unitaria centrada en el origen bajo esta transformación?

VALORES Y VECTORES PROPIOS.

En este capítulo, nos interesaremos por *las rectas invariantes que pasen por el origen* bajo una transformación en forma matricial.

Concretamente, queremos analizar transformaciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$. Lo que hemos venido haciendo en espacios de dimensión dos o tres, se puede generalizar. De hecho, en el tema de Álgebra lineal, estas nociones se extenderán a espacios de dimensión mayor a tres.

Las transformaciones que trataremos, serán $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con la siguiente propiedad

$$Ax = \lambda x \quad , \quad \text{donde } \lambda \in \mathbb{R}.$$

esto intuitivamente quiere decir que si x está sobre una recta que pasa por el origen, bajo la transformación seguirá estando sobre la recta. Veamos un ejemplo gráfica y algebraicamente.

Ejemplo 1. Sea

$$A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

si $x \in \mathbb{R}^2$, $x' = [x_1 \ x_2]$

$$Ax = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

para saber si la transformación A tiene rectas invariantes, debemos tener que $Ax = \lambda x$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{bmatrix} -x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix}$$

esto implica que $-x_1 = \lambda x_1$ y $0 = \lambda x_2$, o sea

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + 1) x_1 &= 0 \\ \lambda x_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

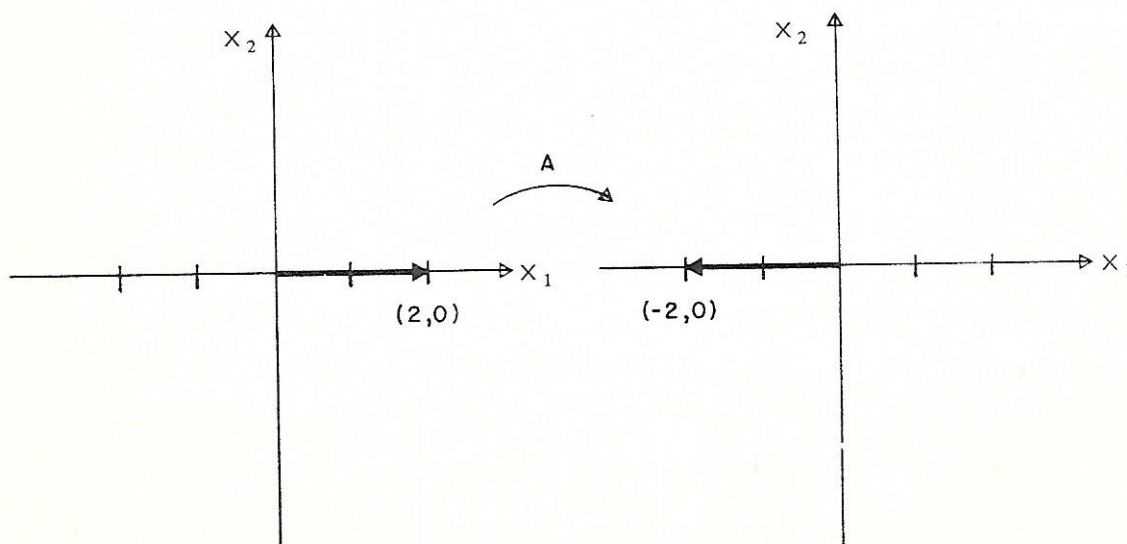
el sistema tiene la solución trivial $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ no importando el valor de λ . Pero si $x_1 \neq 0$, obligatoriamente $\lambda = -1$ y $x_2 = 0$.

Ahora bien, cualquier punto sobre el eje horizontal es de la forma $(x_1, 0)$; y si tomamos $\lambda = -1$ estos puntos cumplen con el sistema.

Resumiendo, para cualquier punto sobre el eje horizontal $x' = [x_1 \ 0]$ se tiene

$$A x = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a los números λ los llamaremos *escalares* y los puntos x los llamaremos *vectores**. Así, si tomamos al punto $(2, 0)$, bajo la transformación obtenemos el $(-2, 0)$ que está sobre "la misma recta".



* Ver definición de espacio vectorial real en el anexo a este capítulo.

Definición. Sea A una matriz cuadrada, $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (o $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$). Si se cumple que

$$A x = \lambda x$$

para valores reales de λ y vectores x de $\mathbb{R}^2$ (o de $\mathbb{R}^3$), a los valores λ se les llamará *valores propios* y, a los elementos de $\mathbb{R}^2$ (o de $\mathbb{R}^3$) que cumplan también con la ecuación se les llamará *vectores propios*.

NOTA: En algunos libros también se les llama valores característicos y vectores característicos, o eigen valores y eigen vectores.

Lo expuesto en los párrafos anteriores, nos muestra que la condición $A x = \lambda x$ es equivalente a un sistema de ecuaciones si por ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

la condición $A x = \lambda x$ es

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

que es equivalente al sistema

$$\left. \begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 &= \lambda x_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 &= \lambda x_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 &= \lambda x_3 \end{aligned} \right\}$$

es decir

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - \lambda) x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 &= 0 \\ a_{21} x_1 + (a_{22} - \lambda) x_2 + a_{23} x_3 &= 0 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + (a_{33} - \lambda) x_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

es fácil de ver que $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$ es solución del sistema y que este sistema se escribe en forma matricial como

$$(A - \lambda I_3)x = 0$$

En este momento, haremos uso de un teorema en relación a los sistemas homogéneos lineales que dice: Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo admite otras soluciones distintas de la solución como (la trivial) si, y solamente si, el determinante del sistema es cero. Así pues, el sistema anterior tiene soluciones distintas de la trivial si y solamente si ,

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

o equivalentemente si

$$(a_{11} - \lambda) [(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) - a_{23} a_{32}] - a_{12} [a_{21}(a_{33} - \lambda) - a_{31} a_{23}] + a_{13}$$

$$[a_{21} a_{32} - a_{31}(a_{22} - \lambda)] = 0$$

Definición. Sea A una matriz cuadrada, $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (o $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$) al polinomio en términos de λ que se obtiene de

$$|A - \lambda I|$$

se le llama polinomio característico.

NOTA: Los λ que cumplan con el polinomio característico, serán los valores propios de la matriz.

Ejemplo 2. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

encontrar los valores y vectores propios de la matriz A .

Resolución.

$$|A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 6$$

igualando a cero obtenemos

$$(1 - \lambda)(2 - \lambda) - 6 = 0$$

es decir $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$. Resolviendo esta ecuación de segundo grado en λ se obtiene $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = -1$

Para encontrar los vectores propios, analizemos

$$Ax = 4x$$

y

$$Ax = (-1)x$$

así pues,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

de ahí se obtiene

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4x_1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 4x_2 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = -x_1 \\ 3x_1 + 2x_2 = -x_2 \end{cases}$$

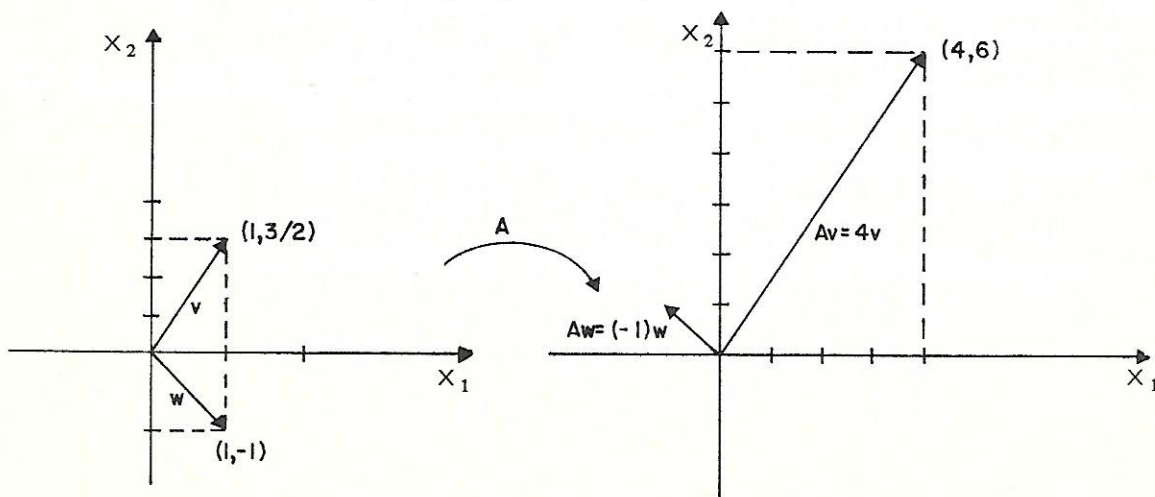
el primer sistema es equivalente a

$$3x_1 - 2x_2 = 0, \quad \text{ecuación asociada a } \lambda_1 = 4$$

el segundo sistema es equivalente a

$$x_1 + x_2 = 0, \quad \text{ecuación asociada a } \lambda_2 = -1$$

puesto que cualquier valor de x_1 y x_2 que satisfaga $3x_1 - 2x_2 = 0$ está sobre la recta invariante bajo la transformación (análogamente para la otra ecuación). Así pues, podíamos tomar $x_1 = 1$ y $x_2 = \frac{3}{2}$ para la primera ecuación y $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$ para la segunda. Por lo tanto $v' = [1 \quad \frac{3}{2}]$ y $w' = [1 \quad -1]$ son los vectores propios asociados a los valores propios $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = -1$ respectivamente.



Las rectas que pasan por el origen y por los puntos $(1, \frac{3}{2})$ y $(1, -1)$ respectivamente, quedan invariantes bajo la transformación. Se puede observar que cualquier punto sobre las rectas puede asociarse a los valores propios. Por ejemplo, pudimos haber tomado $v' = [2 \ 3]$ y $w' = [2 \ -2]$ y también serían vectores propios asociados a los valores proprios $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = -1$ respectivamente.

Ejemplo 3. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

encontrar los valores y vectores propios de la matriz A.

Resolución.

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 7 - \lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6 - \lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (7 - \lambda) [(6 - \lambda)(5 - \lambda) - 4] + 2 [(-2)(5 - \lambda)] = -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 99\lambda + 162$$

igualando a cero y multiplicando por -1 se tiene

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0$$

sabemos que los divisores de 162 positivos y negativos son posibles candidatos a ser raíces del polinomio y ellos son

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18, \pm 27, \pm 54, \pm 81, \pm 162$$

por eliminación se obtiene que $\lambda_1 = 3$ es una raíz y las otras dos se pueden calcular por medio de la fórmula para resolver ecuaciones de 2º grado. Así pues, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$ y $\lambda_3 = 9$.

Analizaremos primeramente $Ax = 3x$, o lo que es lo mismo

$[A - 3 I_3] x = 0$, así se tiene

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

de ahí, se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 &= 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -2x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

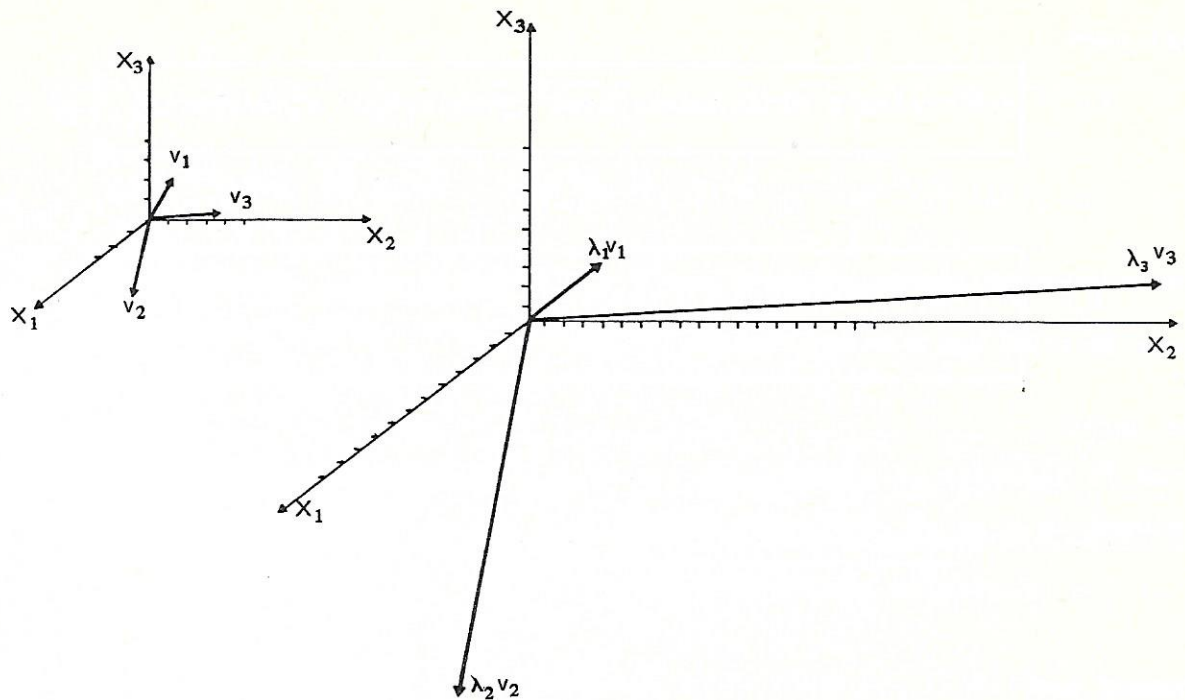
sumando la segunda y tercer ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 &= 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

si damos el valor de $x_1 = 1$ se obtiene $x_2 = 2$ y $x_3 = 2$ y vemos que estos valores cumplen con el sistema. Por tanto, $v_1' = [1 \ 2 \ 2]$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 3$.

Análogamente para $\lambda_2 = 6$ y $\lambda_3 = 9$ se obtienen los vectores propios correspondiente $v_2' = [2 \ 1 \ -2]$ y $v_3' = [-2 \ 2 \ -1]$. Puesto que

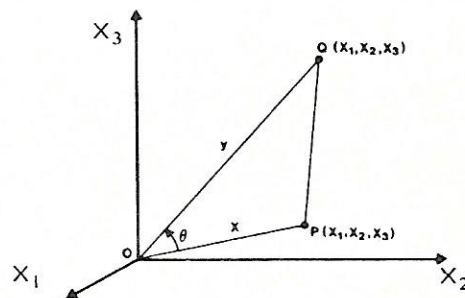
$$\begin{aligned} v_1 &\mapsto A v_1 = \lambda_1 v_1 = [3 \ 6 \ 6]' \\ v_2 &\mapsto A v_2 = \lambda_2 v_2 = [12 \ 6 \ -12]' \\ v_3 &\mapsto A v_3 = \lambda_3 v_3 = [-18 \ 18 \ -9]' \end{aligned}$$



Las rectas invariantes bajo la transformación son las tres rectas que pasan por los vectores v_1 , v_2 y v_3 .

ANGULO ENTRE VECTORES.

Sean x y y dos vectores en $\mathbb{R}^3$, y sean $P(x_1, x_2, x_3)$ y $Q(y_1, y_2, y_3)$ los puntos asociados a los vectores respectivamente



designemos por θ el ángulo entre los vectores x y y ; de la ley de los cosenos aplicado al triángulo OPQ se obtiene

$$\overline{PQ}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 - 2\overline{OP} \cdot \overline{OQ} \cos \theta$$

por otro lado, los segmentos $\overline{PQ}$, $\overline{OP}$ y $\overline{OQ}$ son iguales a

$$\overline{PQ}^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2,$$

$$\overline{OP}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad y$$

$$\overline{OQ}^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

así pues

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 2\overline{OP} \cdot \overline{OQ} \cos \theta$$

reduciendo se tiene

$$\overline{OP} \cdot \overline{OQ} \cos \theta = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

es decir

$$\cos \theta = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}$$

puesto que

$$x'y = [x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = [y_1 \ y_2 \ y_3] \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

$$x'x = [x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [x_1^2 \ x_2^2 \ x_3^2]$$

además

$$y'y = [y_1 \ y_2 \ y_3] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = [y_1^2 \ y_2^2 \ y_3^2]$$

la ecuación se puede escribir

$$\cos \theta = \frac{x'y}{\sqrt{x'x} \sqrt{y'y}}$$

Definición. Un vector x se dice unitario si $x'x = 1$

Definición. Dos vectores x y y son ortogonales si y sólo si $x'y = 0$.

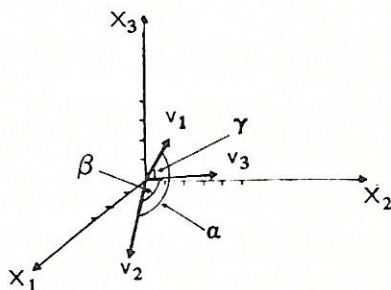
Ejemplo. Sean los vectores v_1 , v_2 y v_3 del ejemplo 3, calcular el ángulo α entre v_1 y v_2 , el ángulo β entre v_2 y v_3 , el ángulo γ entre v_1 y v_3 .

Resolución.

$$\cos \alpha = \frac{v_1' v_2}{\sqrt{v_1' v_1} \sqrt{v_2' v_2}} = \frac{(3)(12) + (6)(6) + (6)(-12)}{\sqrt{(3)^2 + (6)^2 + (6)^2} \sqrt{(12)^2 + (6)^2 + (-12)^2}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{v_2' v_3}{\sqrt{v_2' v_2} \sqrt{v_3' v_3}} = 0 \Rightarrow \beta = 90^\circ$$

$$\cos \gamma = \frac{v_1' v_3}{\sqrt{v_1' v_1} \sqrt{v_3' v_3}} = 0 \Rightarrow \gamma = 90^\circ$$



ESPACIO VECTORIAL REAL.

La siguiente definición se obtuvo al generalizar las propiedades ya conocidas en los números reales.

Definición: Sea E un conjunto distinto del vacío, y consideremos a E provisto de las operaciones $(+)$ y $(\cdot)$. Decimos que $(E, +, \cdot)$ es un *espacio vectorial real* (o espacio vectorial sobre los reales) si se cumplen las siguientes propiedades en E :

- (+) i) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \vec{x} + \vec{y} \in E$ Cerradura.
 ii) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ Conmutatividad.
 iii) $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ Asociatividad.
 iv) $\exists \vec{0} \in E \mid \vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ Neutro.
 v) $\forall \vec{x} \in E, \exists (-\vec{x}) \in E \mid \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$ Inverso.

($\cdot$) Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \vec{x}, \vec{y} \in E$. Entonces:

- i) $\forall \vec{x} \in E, \lambda \vec{x} \in E$ Cerradura.
 ii) $(\lambda + \mu) \vec{x} = \lambda \vec{x} + \mu \vec{x}$ Distributividad.
 iii) $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \vec{x} + \lambda \vec{y}$ Distributividad.
 iv) $(\lambda \cdot \mu) \vec{x} = \lambda(\mu \vec{x})$ Asociatividad
 v) Si $\lambda = 1, 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$ Neutro.

A los elementos de E se les llama *vectores* y a los de $\mathbb{R}$ *escalares*.

NOTA: A los elementos del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ los denotaremos como *vectores columna* y la notación será (por cuestiones de economía) sin la flecha superior.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Encontrar los valores y vectores propios de las siguientes matrices

$$a) \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$$

$$b) \begin{bmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$c) \begin{bmatrix} 9 & -6 & 2 \\ -6 & 8 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$d) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$e) \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 10 & -4 & 5 \\ 5 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$f) \begin{bmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 12 \quad (1, 1, -1)'$$

$\lambda = 3$ es un valor propio que ocurre como una raíz doble del polinomio característico.

$(1, 0, 4)'$ y $(0, 1, 4)'$ son ambos vectores propios así como cualquier otro vector que esté en el plano determinado por ellos. Este es un plano invariante en la transformación.

$$g) \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

valor propio

vector propio

$$\lambda = 3$$

$$(-1, 1, 1)'$$

$\lambda = 6$ raíz
doble

caso análogo al problema anterior.

2.- Probar que los valores característicos de una matriz simétrica* de orden 2 (i.e. que tiene dos filas y dos columnas), siempre son números reales.

¿Es cierto el resultado para una matriz de orden 3?

(*) Los elementos de la matriz son números reales.

SECCIONES CONICAS Y SUPERFICIES CUADRATICAS

En estos dos últimos capítulos, relacionaremos las curvas de 2o. grado que tengan un centro de simetría, y sus ecuaciones correspondientes en forma matricial.

Como objetivo principal se tiene el de generar ideas geométricas e intuitivas que, en un curso posterior de Algebra Lineal se volverán a analizar; pero en espacios de dimensión mayor a tres. Es decir, las ideas geométricas las estudiaremos en espacios de dos y tres dimensiones para una generalización posterior.

En el plano, una cónica centrada en el origen tiene por ecuación:

$$ax_1^2 + 2rx_1x_2 + bx_2^2 = c, \text{ donde } a, b, c \text{ y } r \text{ son constantes.}$$

Esta ecuación, la podemos escribir matricialmente de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & r \\ r & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c$$

Ejercicio: Hágase la multiplicación de matrices de la fórmula anterior para obtener la ecuación de las cónicas centradas en el origen.

Por tanto, toda cónica con centro de simetría tiene asociada una matriz simétrica.

$$\begin{bmatrix} a & r \\ r & b \end{bmatrix}$$

Analizaremos en seguida un ejemplo que relacionará conceptos de tan-

gencia y normal a una curva desde el punto de vista geométrico y algebraico.

Sea la ecuación $9x_1^2 + 4x_2^2 = 36$. Calculemos la derivada con respecto a la variable x_1 .

$$\frac{d}{dx_1} (9x_1^2 + 4x_2^2) = \frac{d}{dx_1} (36)$$

de ahí,

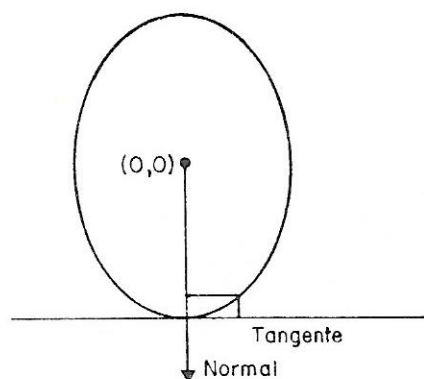
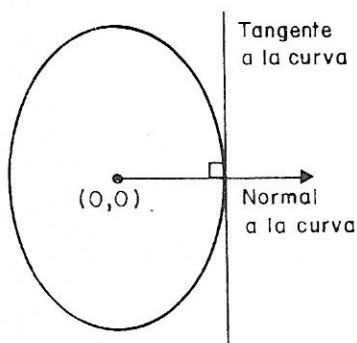
$$18x_1 + 8x_2 \frac{dx_2}{dx_1} = 0$$

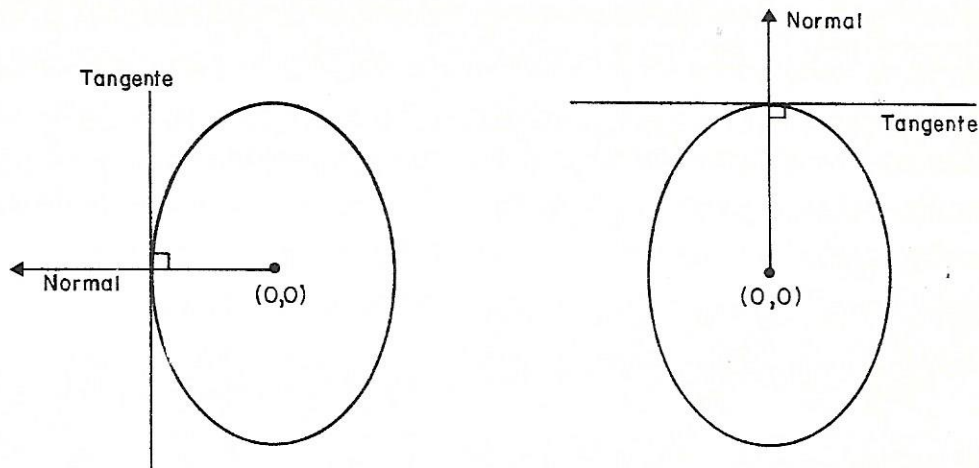
es decir

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{9x_1}{4x_2}$$

Si (p, q) representa un punto cualquiera sobre la curva (en este caso es una elipse), de la ecuación anterior se tiene que $-\frac{9p}{4q}$ es el coeficiente director de la tangente en (p, q) y $\frac{4q}{9p}$ es el coeficiente director de la normal a la tangente.

Calculemos la tangente y su normal en cada uno de los siguientes puntos de la elipse (puntos que están sobre sus ejes de simetría, ver figura), $(2, 0)$, $(0, -3)$, $(-2, 0)$ y $(0, 3)$; el coeficiente director de la tangente en cada uno de ellos es $-\infty, 0, +\infty, 0$ respectivamente; y los coeficientes directores de las normales de cada una de las tangentes son $0, -\infty, 0, +\infty$.





En estos casos, la normal está sobre los ejes cartesianos. Ahora, - veamos cierta relación con la matriz simétrica asociada a la ecuación de la elipse y los puntos tratados; calculemos

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \end{bmatrix}$$

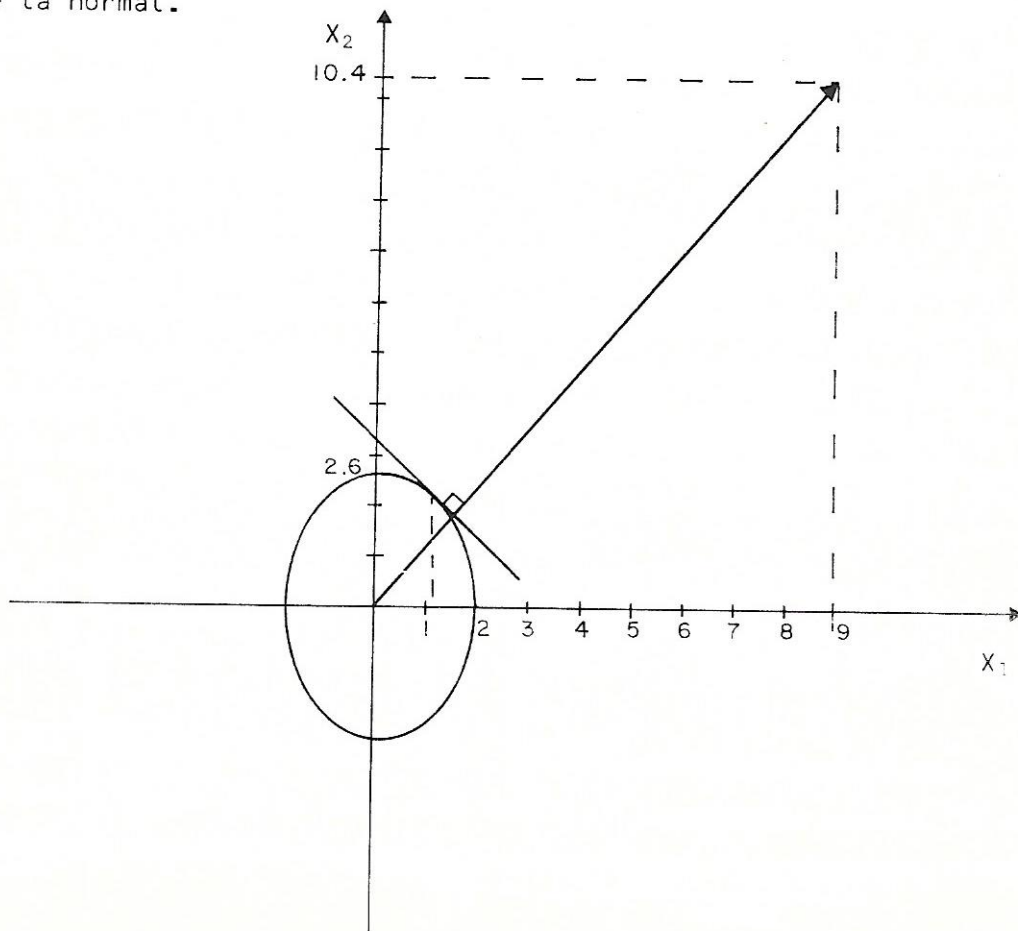
Los puntos obtenidos $(18, 0)$, $(0, -12)$, $(-18, 0)$ y $(0, 12)$, vistos en $\mathbb{R}^2$ tienen exactamente la misma dirección de la normal. Ahora bien, la matriz asociada a la ecuación de la elipse, multiplicada por los puntos

(en forma matricial) producen vectores que están en la *misma dirección* que la normal en cada uno de esos puntos.

Hemos calculado un producto matricial relacionado con puntos muy especiales, ellos están sobre los ejes cartesianos, y en este caso, coinciden con los ejes principales de la elipse. Tomemos otro punto diferente a los anteriores, por ejemplo, el punto (1, 2.6) que satisface la ecuación de la elipse. El coeficiente director de la tangente a la curva en ese punto es $-\frac{9}{10.4}$, y el coeficiente director de la normal a la tangente es $\frac{10.4}{9}$. En forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 10.4 \end{bmatrix}$$

nuevamente, el vector asociado al punto (9, 10.4) está en la misma dirección que la normal.



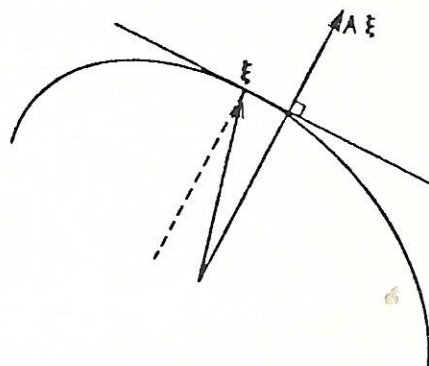
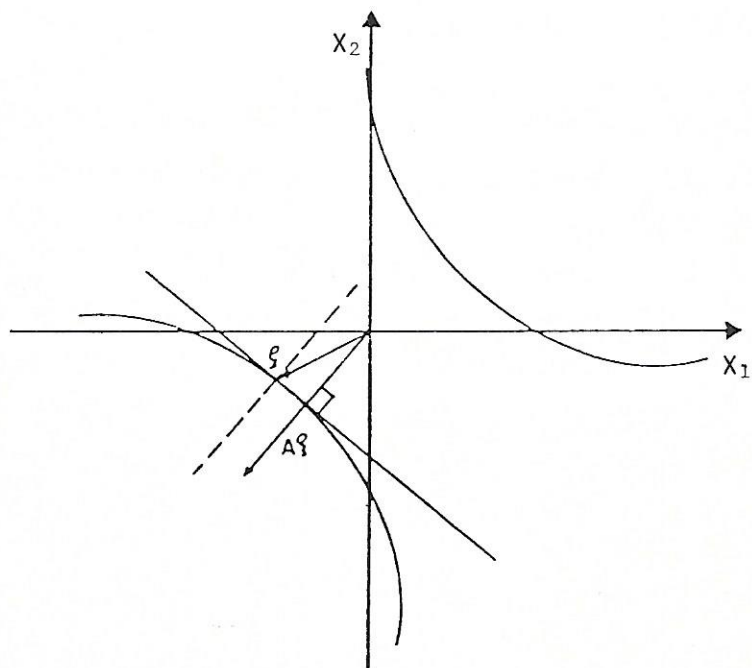
Aun y cuando hemos calculado la tangente y normal en varios puntos de la curva, tendríamos que agotar todos sus puntos. Además, se ha tomado una curva en particular, y la pregunta sería si el mismo proceso lo admitiría otro tipo de curva (entre las cónicas).

La respuesta es sí, aun más, el resultado se puede generalizar a superficies cuadráticas. Enunciaremos el teorema y daremos otros ejemplos, el profesor interesado en la demostración del teorema, la podrá encontrar en el anexo a este capítulo.

Teorema: Si ξ es un vector asociado a un punto de la cuadrática

$$x'Ax = k, \quad k = \text{constante},$$

donde A es una matriz simétrica, entonces la normal en ese punto tiene por vector director $A\xi$.



NOTA: x' denota el vector transpuesto; por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$ x' podría ser

$$[x_1 \ x_2 \ x_3] \quad \text{y} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo.

Dada la ecuación de un elipsoide

$$6x_1^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 12x_2^2 - 8x_2x_3 + 13x_3^2 = 26$$

que en forma matricial se escribe

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 4 & 12 & -4 \\ -2 & -4 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 26$$

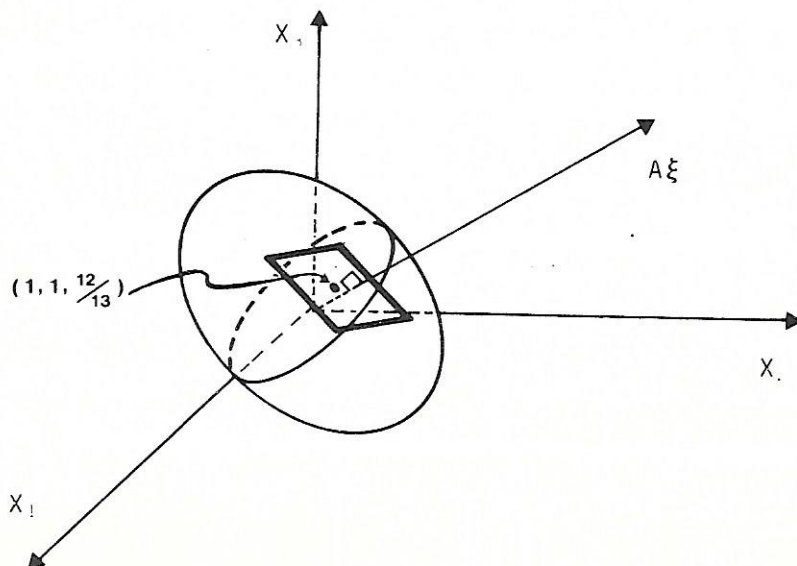
Calcular la normal al plano tangente a la curva en el punto
 $= (1, 1, 12/13)$.

Resolución:

De acuerdo al teorema, debemos calcular $A\xi$

$$A\xi = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 4 & 12 & -4 \\ -2 & -4 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{12}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{106}{13} \\ \frac{160}{13} \\ 6 \end{bmatrix}$$

en términos geométricos, se tendría



Por tanto

$$t^2 \eta' A \eta + t(\eta' A \xi + \xi' A \eta) = 0 \Rightarrow t = 0$$

es raíz del polinomio en t . Para que la recta PQ corte solamente una vez a la cuadrática, debemos tener que $t = 0$ es una raíz doble del polinomio en t , por tanto:

$$t[t \eta' A \eta + (\eta' A \xi + \xi' A \eta)] = 0 \Rightarrow_{t=0}$$

$$t \eta' A \eta + (\eta' A \xi + \xi' A \eta) = 0 \Rightarrow_{t=0}$$

$$\eta' A \xi + \xi' A \eta = 0$$

$$\eta' A \xi + \eta' A \xi = 0 \Rightarrow 2\eta' A \xi = 0 \Rightarrow \eta' A \xi = 0 \Rightarrow \text{que } \eta$$

es ortogonal a $A\xi$.

En particular, si η tiene la dirección de una *tangente* a la cuadrática en el punto P, entonces ese vector es ortogonal a $A\xi$.

Pero existe solamente una recta ortogonal a todas las tangentes de la cuadrática en el punto P, la normal de la cuadrática en ese punto.

En definitiva, la normal en el punto asociado al vector ξ tiene como vector director $A\xi$.

4.- Escribir las siguientes funciones en forma matricial.

a) $Q(X) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3 - 2x_2^2 + 4x_3^2$

b) $2x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3 - 4x_3^2$

c) $x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2 + x_3^2$

5.- Escribir como un polinomio de segundo grado (en dos variables) cada una de los siguientes productos.

a)
$$[x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

b)
$$[x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

6.- Probar el siguiente resultado y dar una interpretación geométrica de él.

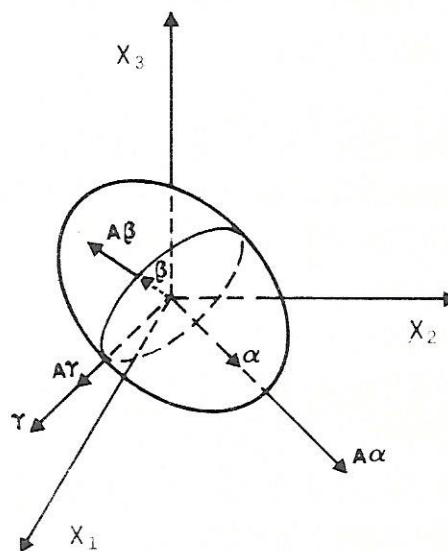
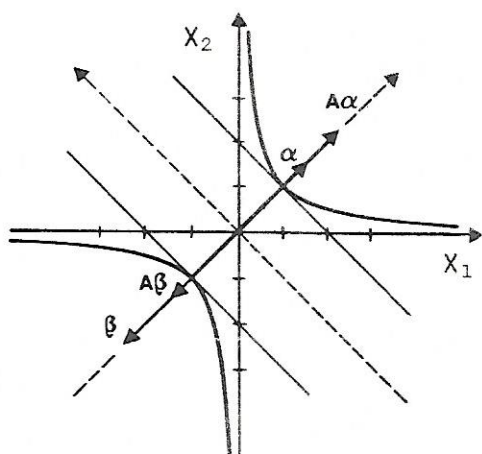
Si a cada x se le asocia un kx , $k = \text{constante}$. Es decir $x \mapsto kx$ y si x satisface la ecuación $X'AX = c_1$, entonces kx verifica $(kx)'A(kx) = c_2$ donde $c_2 = k^2c_1$.

7.- Dada la ecuación $9x_1^2 - 4x_2^2 = 36$, gráfíquela y verifique el teorema de la página 107 para al menos dos puntos distintos de los vértices de la hipérbola.

EJES PRINCIPALES Y TRANSFORMACIONES ORTOGONALES

En el capítulo anterior, se llegó al resultado siguiente, si la ecuación $x'Ax = k$, $k = \text{constante}$, A simétrica, representa una cuadrática centrada, la normal asociada al vector ξ tiene por vector director $A\xi$.

Hemos visto también, que la normal es colineal al vector, si este último está sobre el eje de simetría. Enseguida se muestran pictóricamente algunos ejemplos:



Podríamos inducir que los ejes de simetría tienen como vectores directores los puntos x que cumplen $Ax = \lambda x$. En otras palabras: los ejes de simetría o ejes principales de una cuadrática centrada, tienen por vectores directores los vectores propios de la matriz A asociada a la cuadrática.

Veamos un ejemplo desde el punto de vista algebraico y geométrico.

La idea que se quiere seguir es la siguiente: sabemos del Capítulo 6 como calcular valores y vectores propios de una matriz dada, de ahí podemos encontrar los ejes de simetría de la cónica y cuadrática (aún y cuando no se sepa que tipo de curva se trata); haciendo un cambio de ejes, se podría transformar la ecuación de la curva y tener una cónica o cuadrática centrada y, además, que sus ejes de simetría coincidan con los ejes coordenados. De esta manera es fácilmente identificable el tipo de curva y sólo bastaría un ángulo adecuado para obtener su gráfica de la ecuación inicial.

La importancia del método en términos de una visión geométrica y algebraica es preponderante. A pesar de que pueda ser arduo el cálculo para llegar al resultado, es bueno hacerlo varias veces. Hoy en día, computadoras y microcomputadoras hacen este tipo de labor en muy poco tiempo pero, las ideas intuitivas quedan completamente fuera.

Conservaremos en los que sigue la visión de la que se habló en los párrafos anteriores, además de un enfoque hacia el Álgebra Lineal.

Ejemplo 1. Discuta y dibuje la gráfica de la ecuación

$$41x_1^2 - 24x_1x_2 + 34x_2^2 - 25 = 0$$

Resolución. La ecuación la podemos escribir en la forma $x^tAx = K$, es decir

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 41 & -12 \\ -12 & 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 25$$

de ahí y de acuerdo al Capítulo de Valores y Vectores Propios debemos calcular

$$0 = |A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 41 - \lambda & -12 \\ -12 & 34 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 75\lambda + 1250$$

los valores de λ que satisfacen la ecuación anterior son $\lambda_1 = 25$ y $\lambda_2 = 50$. Estos valores propios satisfacen

$$Ax = \begin{bmatrix} 41 & -12 \\ -12 & 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

es decir que

$$\begin{aligned} 41x_1 - 12x_2 &= \lambda x_1 \\ -12x_1 + 34x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned}$$

sustituyendo $\lambda_1 = 25$ en este sistema, obtenemos

$$\begin{cases} 41x_1 - 12x_2 = 25x_1 \\ -12x_1 + 34x_2 = 25x_2 \end{cases}$$

que es equivalente a

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

de ahí $x_1 = \frac{3}{4} x_2$. En este caso podemos tomar cualquier valor de x_2 , por ejemplo $x_2 = 1$, lo cual implica $x_1 = \frac{3}{4}$. Así pues, un vector propio asociado a $\lambda_1 = 25$ es el $[\frac{3}{4}, 1]^T$. Ahora bien, para $\lambda_2 = 50$ se tiene el sistema

$$\begin{cases} 41x_1 - 12x_2 = 50x_1 \\ -12x_1 + 34x_2 = 50x_2 \end{cases}$$

que es equivalente a

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$$

de ahí que $x_1 = -\frac{4}{3} x_2$. De manera análoga, si $x_2 = 1$, entonces $x_1 = -\frac{4}{3}$. Por tanto, un vector propio asociado a $\lambda_2 = 50$ es el $[-\frac{4}{3}, 1]^T$.

Normalizando los vectores*

$$[\frac{3}{4}, 1] \quad \text{y} \quad [-\frac{4}{3}, 1]$$

se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{(\frac{3}{4})^2 + (1)^2}} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix},$$

pongamos

$$u = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

(*) Dado un vector x , normalizar equivale a calcular $\frac{x}{||x||}$

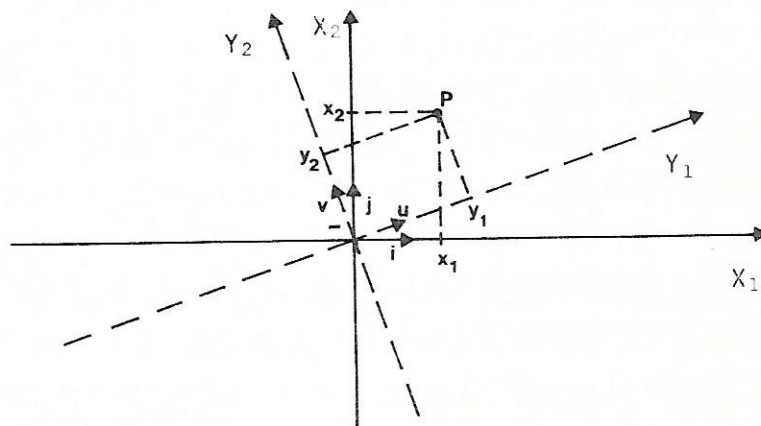
$$\frac{1}{\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + (1)^2}} \left[-\frac{4}{3}, 1 \right] = \left[-\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right],$$

pongamos

$$v = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Según lo explicado antes del inicio de este ejemplo, estos vectores están sobre los ejes principales de la cónica (aún y cuando no sepamos de qué cónica se trata), y se requiere como siguiente paso en el proceso hacer un cambio de ejes.

En términos generales, un punto P tiene coordenadas^{*} (x_1, x_2) en un sistema de ejes $X_1 - X_2$ y coordenadas (y_1, y_2) en otro sistema de ejes $Y_1 - Y_2$



(*) Existen fórmulas en Geometría Analítica para una rotación de un sistema de ejes, pero aquí tratamos de conservar la mira hacia el Álgebra Lineal.

Así pues, el vector asociado a P se escribe como $x_1 i + x_2 j$ en un sistema, y es igual a $y_1 u + y_2 v$ en términos de otro sistema, o sea

$$x_1 i + x_2 j = y_1 u + y_2 v$$

multiplicando matricialmente la ecuación anterior por i' y j' para obtener los valores de x_1 y x_2 . En otras palabras "despejando los valores de x_1 y x_2 "

$$\begin{cases} x_1 i' i + x_2 i' j = y_1 i' u + y_2 i' v \\ x_1 j' i + x_2 j' j = y_1 j' u + y_2 j' v \end{cases}$$

es decir

$$\begin{cases} x_1 \begin{bmatrix} 1, 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1, 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = y_1 \begin{bmatrix} 1, 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 1, 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} \\ x_1 \begin{bmatrix} 0, 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0, 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = y_1 \begin{bmatrix} 0, 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 0, 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} \end{cases}$$

o en forma equivalente

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{5} y_1 - \frac{4}{5} y_2 \\ x_2 = \frac{4}{5} y_1 + \frac{3}{5} y_2 \end{cases}$$

de ahí,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

substituyendo este resultado en la ecuación original $x'Ax = 25$, se tiene

$$\left(\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right)' \begin{bmatrix} 41 & -12 \\ -12 & 34 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right) = 25$$

o sea

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 41 & -12 \\ -12 & 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 25$$

calculando el producto de las matrices cuadradas y simplificando

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 25$$

en forma equivalente

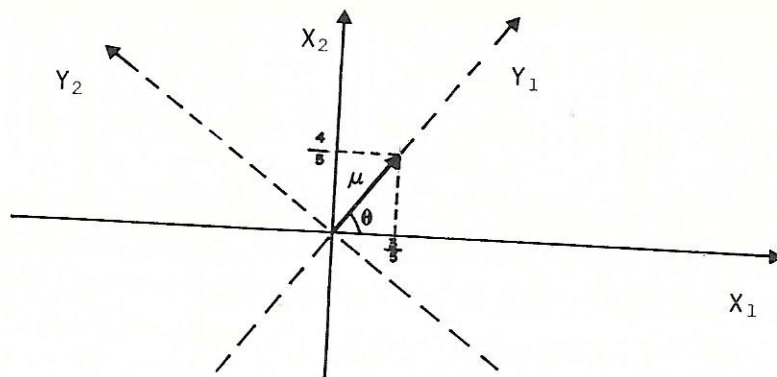
$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 1$$

finalmente

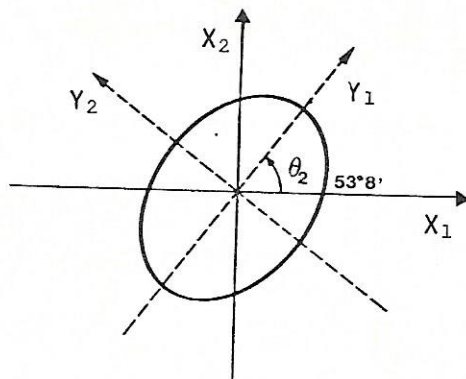
$$y_1^2 + 2y_2^2 = 1$$

la cual es fácilmente reconocible, una elipse con vértices en $(\pm 1, 0)$ sobre el eje y_1 . También sabemos que el punto en $\mathbb{R}^2$ asociado al vector u es el $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ en el sistema coordenado $x_1 - x_2$ (ver figura), por tanto

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{4/5}{3/5} = \frac{4}{3}$$



de ahí que $\theta \approx 53^\circ 8'$. Con todos estos datos, se tiene la gráfica siguientes.



En el ejemplo anterior, los vectores propios resultaron que son perpendiculares entre sí, en lo general este resultado es cierto.

Teorema: Si A es una matriz simétrica, λ y μ dos valores propios de A diferentes, asociados a los vectores propios x y y respectivamente, entonces los vectores son perpendiculares entre sí.

Demostración. Por definición de vectores propios se tiene que $Ax = \lambda x$ y $Ay = \mu y$.

De ahí, $x'A = \lambda x'$ y por ver $A = A'$ se tiene $x'A = \lambda x'$ multiplicando por la derecha a la ecuación por y se obtiene $x'Ay = \lambda x'y$, pero $Ay = \mu y$, por tanto $x'\mu y = \lambda x'y$. Es decir, $(\mu - \lambda)x'y = 0$, puesto que $\lambda \neq \mu$, esto implica que $x'y = 0$.

De manera análoga, $y'x = 0$.

Otro resultado interesante que sólo enunciaremos en este momento es, que dada una cuadrática $x'Ax = 1$, entonces las longitudes de los semi-ejes principales valen respectivamente $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$ y $\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$ en el caso de una cónica y

$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$, $\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$ y $\frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}$ en el caso de una superficie cuadrática.

Ejemplo 2. Discuta y dibuje la gráfica de la ecuación

$$7x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2 = 3$$

Resolución. La matriz simétrica asociada a la cuadrática es

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

de ahí

$$0 = |A - \lambda I_3| = \lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162$$

cuyas raíces son $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$ y $\lambda_3 = 9$ (ver ejemplo 3 del Capítulo 6). Los vectores propios asociados a estos valores son

$$v_1' = [1, 2, 2]$$

$$v_2' = [2, 1, -2]$$

$$v_3' = [-2, 2, -1]$$

normalizando cada uno de ellos se tiene

$$w_1' = \frac{v_1'}{\|v_1'\|} = [1/3, 2/3, 2/3]$$

$$w_2' = \frac{v_2'}{\|v_2'\|} = [2/3, 1/3, -2/3]$$

$$w_3' = \frac{v_3'}{\|v_3'\|} = [-2/3, 2/3, -1/3]$$

análogamente como en el ejemplo anterior, se tiene que un punto P en $\mathbb{R}^3$ puede tener dos representaciones según los ejes

$$x_1 i' + x_2 j' + x_3 k' = y_1 w_1 + y_2 w_2 + y_3 w_3$$

donde $i' = [1, 0, 0]$; $j' = [0, 1, 0]$ y $k' = [0, 0, 1]$

Ahora, multiplicando la ecuación por estos vectores y reduciendo cada una de las ecuaciones, se obtiene

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} y_1 + \frac{2}{3} y_2 - \frac{2}{3} y_3 \\ x_2 = \frac{2}{3} y_1 + \frac{1}{3} y_2 + \frac{2}{3} y_3 \\ x_3 = \frac{2}{3} y_1 - \frac{2}{3} y_2 - \frac{1}{3} y_3 \end{cases}$$

de ahí que

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

substituyendo este resultado en la ecuación original $x'Ax=3$, y reduciendo obtenemos

$$[y_1 \ y_2 \ y_3] \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 3$$

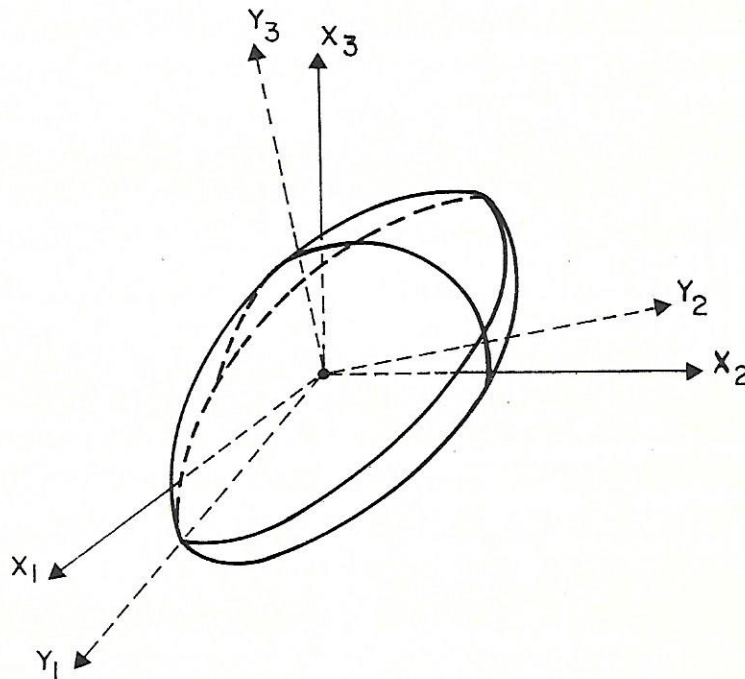
en forma equivalente

$$[y_1 \ y_2 \ y_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 1$$

finalmente

$$y_1^2 + 2y_2^2 + 3y_3^2 = 1$$

esta ecuación corresponde a un elipsoide, sus ejes principales están sobre las rectas cuyas direcciones se obtienen por los vectores v_1 , v_2 y v_3 .



NOTA: Denotaremos por H la matriz cuyas columnas son los vectores propios normalizados. Dicha matriz es llamada matriz de los cosenos directores y tiene una propiedad muy importante:

Sabemos que si H^{-1} existe, entonces

$$\begin{cases} y = H'x & \dots \dots (1) \\ x = Hy & \dots \dots (2) \end{cases}$$

multiplicando la ecuación (1) por H y escribiendo la matriz identidad $I = H \cdot H^{-1}$ en la ecuación (2), obtenemos

$$\begin{cases} Hy = HH'x \\ x = Ix = HH^{-1}x = Hy \end{cases}$$

es decir que

$$Hy = HH'x = HH^{-1}x$$

multiplicando esta ecuación por H^{-1} se obtiene que

$$H'x = H^{-1}x$$

puesto que esta igualdad es para cualquier x , se tiene que

$$H' = H^{-1}$$

De los ejemplos se pueden descubrir dos resultados importantes, que son los siguientes.

Teorema: Si A es una matriz simétrica y H la matriz cuyas columnas son los vectores propios normalizados de A , entonces la matriz $H'AH$ es la matriz diagonal cuyos elementos diagonales son los valores propios de A .

Demostración: Restringiremos la demostración para matrices que poseen valores propios diferentes y además que A sea una matriz de tres líneas y tres columnas. El mismo proceso se puede utilizar en lo general.

Sea λ_1, λ_2 y λ_3 los valores propios de la matriz A y ξ_1, ξ_2 y ξ_3 los vectores propios normalizados asociados.

Si denotamos por H la matriz cuyas columnas son los vectores ξ_1, ξ_2 y ξ_3 , entonces $H = [\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3]$. O sea, que si

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}; \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \text{ y } \xi_3 = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix}$$

se tiene que

$$H = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix}$$

además

$$AH = A[\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3] = A \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} = [A\xi_1 \quad A\xi_2 \quad A\xi_3]$$

por otro lado, sabemos que $A\xi_1 = \lambda_1 \xi_1$, $A\xi_2 = \lambda_2 \xi_2$ y $A\xi_3 = \lambda_3 \xi_3$ de ahí que

$$AH = [A\xi_1 \quad A\xi_2 \quad A\xi_3] = [\lambda_1 \xi_1 \quad \lambda_2 \xi_2 \quad \lambda_3 \xi_3]$$

o sea

$$AH = \begin{bmatrix} \lambda_1 \alpha_1 & \lambda_2 \beta_1 & \lambda_3 \gamma_1 \\ \lambda_1 \alpha_2 & \lambda_2 \beta_2 & \lambda_3 \gamma_2 \\ \lambda_1 \alpha_3 & \lambda_2 \beta_3 & \lambda_3 \gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

es decir

$$AH = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

pongamos

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

así pues $AH = HD$, multiplicando por la izquierda esta ecuación por H' , se

tiene que $H'AH = H'HD$. De la nota anterior al teorema, se sabe que $H' = H^{-1}$, por tanto $H'H = H^{-1}H = I$. Así pues, $H'AH = D$.

Definición: Una matriz H tal que $H^{-1} = H'$ la llamaremos matriz ortogonal.

El segundo resultado tiene que ver con la definición anterior.

Teorema: Si A es una matriz simétrica y H una matriz ortogonal, entonces $H'AH$ es simétrica, además $H'AH$ y A poseen los mismos valores propios.

Demostración: Primero veremos que $H'AH$ es simétrica; es decir, debemos probar que $H'AH = (H'AH)'$, pero ello es inmediato utilizando el problema 25 del Capítulo 3.

Veamos la segunda parte del teorema. Sea λ un valor propio de A , asociado al vector propio $x \neq 0$. Así $Ax = \lambda x$, pongamos* :

$$x = Hy \Rightarrow \lambda x = Ax = AHy \Rightarrow H\lambda Ay = \lambda H'x \Rightarrow H'AHy = \lambda ;$$

por tanto, λ es valor propio de $H'AH$, asociado al vector propio $y = H'x$, siempre y cuando $y \neq 0$.

Ahora bien, si $y = 0$, entonces $H'y = H'Hx = Ix = x = 0$ pero por hipótesis $x \neq 0$.

Por lo tanto, todo valor propio de A es valor propio de $H'AH$.

Para probar que todo valor propio de $H'AH$ es valor propio de A se procede de manera análoga.

(*) Como x y H están dadas y $H' = H^{-1}$, H^{-1} siempre existe; entonces y se construye así: $y = H^{-1}x$ de modo que $x = HH^{-1}x = Hy$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

- 1.- Discuta y dibuje la gráfica de la ecuación.

$$5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2 - 9 = 0$$

- 2.- Discuta y dibuje la gráfica de la ecuación

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 4$$

- 3.- Discuta y dibuje la gráfica de la ecuación

$$x_1^2 - 10x_1x_2 + x_2^2 = -12$$

- 4.- Discuta y dibuje la gráfica de la ecuación

$$6x_1^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 12x_2^2 - 8x_2x_3 + 13x_3^2 = 1$$

- 5.- Discuta y dibuje la gráfica de la ecuación

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_3^2 = 6$$

- 6.- Una matriz H se dice que es *ortogonal* si $H^{-1} = H'$ pruebe que el producto de dos matrices ortogonales es una matriz ortogonal. Dé varios ejemplos de matrices ortogonales.

- 7.- Encuentre una condición necesaria y suficiente para que la siguiente matriz sea ortogonal:

$$\begin{bmatrix} x + y & y - x \\ x - y & y + x \end{bmatrix}$$

8.- Si H es una matriz ortogonal pruebe que:

- i) La transformación $x \mapsto Hx$ preserva longitudes, es decir, la longitud de un vector x no cambia al aplicarle la transformación.
- ii) La transformación $x \mapsto Hx$ preserva el ángulo entre dos vectores.

SOLUCIONES

CAPITULOS 1 y 2.

1.- $(1, 2, 3)$

2.- $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3})$

3.- $(0, 0, 0)$

4.- $(1, 2)$

5.- $\emptyset$

6.- $(\frac{a^2b + ab^2}{a^2 + b^2}, \frac{a^2b - ab^2}{a^2 + b^2})$

7.- $(\frac{2ab}{a+b}, \frac{2ab}{a+b})$

8.- $(5, 9)$

9.- $(2, 1)$

10.- Para $k = 2$

11.- Para $k \neq 7.5$

12.- Para $k = 8$

13.- El sistema es consistente y tiene solución única. Las ecuaciones representan rectas que se intersectan en un punto.

14.- El sistema es inconsistente y por tanto no tiene solución. Las ecuaciones representan rectas paralelas .

- 15.- El sistema es inconsistente y por tanto no tiene solución. Las ecuaciones representan rectas paralelas.
- 16.- El sistema es consistente y tiene infinitas soluciones. Ambas ecuaciones representan la misma recta.
- 17.- Largo = 25 metros y ancho = 4 metros
- 18.- Largo = 16 metros y ancho = 12 metros
- 19.- Largo = 5 metros y ancho = 4 metros
- 20.- Largo = 20 metros y ancho = 5 metros
- 21.- 64
- 22.- $7/12$
- 23.- 375
- 24.- $A = 22$, $B = 2$
- 25.- 120 000 pesos colocados al 3%
160 000 pesos colocados al 5%
- 26.- 90 pesos cuesta el café
80 pesos cuesta la mantequilla
- 27.- $A = 50$ pesos el litro
 $B = 40$ pesos el litro
- 28.- $26 \frac{2}{3}$ litros se extraen de A
 $13 \frac{1}{3}$ litros se extraen de B

29.- 20 Km/hr es la velocidad de la motora
5 Km/hr es la velocidad de la corriente

30.- 60 m/seg es la velocidad del tren A
50 m/seg es la velocidad del tren B

CAPÍTULO 3.

1.-
$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 5 \\ 5 & -2 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

2.-
$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

3.-
$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

4.-
$$A + A = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ -4 & -6 & 2 \end{bmatrix} \quad B + B = \begin{bmatrix} -4 & 8 & 0 \\ 2 & -4 & 6 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A + A = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad B + B = \begin{bmatrix} -6 & 0 & -4 \\ 4 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

5.- $x = 7$

$y = 3$

$z = 5$

6.-
$$3A = \begin{bmatrix} 6 & -9 & 12 & 15 \\ 3 & 6 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad -2A = \begin{bmatrix} -4 & 6 & -8 & -10 \\ -2 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

7.-
$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$$

8.- a).

$$A - B = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

b).

$$2A + 3B = \begin{bmatrix} 6 & -8 & -4 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 9 & 0 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 17 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

c).

$$2A - 3B = \begin{bmatrix} 6 & -8 & -4 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 9 & 0 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -11 & -7 \\ -1 & 2 & 13 \end{bmatrix}$$

9.- a).

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 8 \\ 2 & 0 & -6 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

b).

$$-3A = \begin{bmatrix} -6 & 3 & -12 \\ -3 & 0 & 9 \\ -6 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

c).

$$\frac{1}{2}A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

d)

$$\frac{3}{4}A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} & 3 \\ \frac{3}{4} & 0 & -\frac{9}{4} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$10.- \quad AB = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -7 & -3 \end{bmatrix}$$

11.-

$$AB = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

12.-

$$AC = \begin{bmatrix} 70 \\ 78 \\ 102 \end{bmatrix}$$

13.- a) $[20 \ 960]$ b) $[20 \ 960]$

14.-

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 8 & 4 & 6 \\ -12 & -6 & -9 \end{bmatrix} \quad BA = [4 + 4 - 9] = [-1]$$

15.- a)

$$3A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -6 \\ 0 & -3 & 9 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

b)

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

16.- a)

$$AB = \begin{bmatrix} 7 & 10 & -14 \\ 0 & 6 & -11 \end{bmatrix}$$

b)

$$B^2 = BB = \begin{bmatrix} -9 & -8 & 16 \\ 5 & 10 & -15 \\ -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

17.-

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \neq I_2$$

18.-

$$AB = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} ; \quad BA = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$$

23.-

Sugerencia: Compruebe el resultado para algunos casos particulares, después use inducción matemática.

CAPITULO 4.

1.-

a)

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

b) $AX = B$; donde A es la matriz del inciso a) y

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

c)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array} \right]$$

3.- Matriz de coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & -3 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

4.- $x = 3, \quad y = -2, \quad z = 4$

5.- Sugerencia: escriba $(2,0,1)$ como la matriz $[2 \ 0 \ 1]^T$

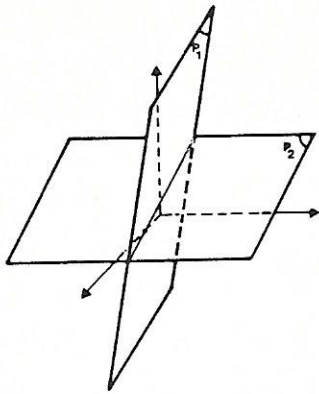
6.- Solución: $[3 \ 0 \ 5]^T$

para checar la solución pruebe que:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

7.- Hay una infinidad de soluciones, a saber cualquier terna de la forma $(1 - 7C, C, 5C)$ con $C \in \mathbb{R}$.

Geométricamente la solución es la recta que pasa por el punto $(1,0,0)$ en la dirección de $(-7,1,5)$.



Los planos P_1 y P_2 son los que quedan después de eliminar una de las ecuaciones del sistema.

8.-

- a) $(0, 0, 0)$
- b) $\{(C, 7C, 5C) \mid C \in \mathbb{R}\}$
- c) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1)$
- d) $(-29, 1, 24)$
- e) $\{(0, \frac{7}{2}C, C) \mid C \in \mathbb{R}\}$
- f) $\{(7K, 5K, 3K) \mid K \in \mathbb{R}\}$
- g) $(0, 0, 0)$
- h) Ninguna solución.

9.-

a)

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{bmatrix} -\frac{1}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{4}{11} & -\frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{3}{14} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$\text{f) } \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

10.- Que el sistema tenga una solución única, que tenga una infinidad de soluciones, que no tenga solución.

- 11.-
- a) H
 - b) N
 - c) H
 - d) N
 - e) N
 - f) N

12.- Un sistema homogéneo siempre tiene la solución "trivial" i.e. la que consta de puros ceros.

13.- $2x = 8 \Rightarrow x = 4$
 $y = 3$, z puede tomar cualquier valor
 $\therefore$ La solución es $(4, 3, C)$ $C \in \mathbb{R}$.

14.- La última fila equivale a $0x + 0y + 0z = 3$, es decir $0 = 3$ lo cual es imposible y por tanto el sistema no puede tener solución.

15.- (b), (c), (a)

16.- a) $\frac{1}{2} I$

b) $\frac{1}{4} I$

$$c) \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$d) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

17.-

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

entonces

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_1^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n^{-1} \end{bmatrix}$$

siempre que $a_i \neq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

18.- La relación correcta es: $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ pues

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(B(B^{-1}A^{-1})) = A((BB^{-1})A) = A(IA^{-1}) =$$

$$= A(A^{-1}) = I$$

de manera análoga se prueba que: $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$. Lo cual implica que la inversa de AB es $B^{-1}A^{-1}$ es decir $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Note que aquí sólo se uso asociatividad de la multiplicación de matrices.

19.- $AA^{-1} = A^{-1}A = I \Rightarrow A^{-1}A = A A^{-1} = I$

$$\therefore (A^{-1})^{-1} = A$$

21.- $k \neq -1$

22.- La bolsa no puede contener cuatro veces tantas monedas de \$ 10 como de \$20, pues al resolver el sistema y hacer esta suposición conduce a que en la bolsa no hay un número entero de monedas de \$50 lo cual es un absurdo.

23.-

La inversa es:

i)

$$\begin{bmatrix} \frac{3a+1}{4a+1} & -\frac{a}{4a+1} & -\frac{a}{4a+1} & -\frac{a}{4a+1} \\ -\frac{a}{4a+1} & \frac{3a+1}{4a+1} & -\frac{a}{4a+1} & -\frac{a}{4a+1} \\ -\frac{a}{4a+1} & -\frac{a}{4a+1} & \frac{3a+1}{4a+1} & -\frac{a}{4a+1} \\ -\frac{a}{4a+1} & -\frac{a}{4a+1} & -\frac{a}{4a+1} & \frac{3a+1}{4a+1} \end{bmatrix}$$

$$\text{Si } a \neq -\frac{1}{4}$$

$$\text{ii) Si } a = -\frac{1}{4} \quad \underline{\text{no hay inversa.}}$$

CAPITULO 5.

1.-

- a) "Triplica" cada punto.
- b) Giro de 90° en el sentido de las manecillas del reloj.
- c) Todo punto lo deja donde esté.
- d) Giro de 180° respecto al plano $X_1 - X_3$
- e) Giro de 90° respecto al eje X_3

- 2.- i) a). Único punto fijo $(0, 0)$ $\therefore$ no hay rectas fijas.
 b). Único punto fijo $(0, 0)$ $\therefore$ no hay rectas fijas.
 c). Todo punto del plano es un punto fijo, también cualquier recta es fija.
- ii) a). Todas las rectas que pasan por el origen.
 b). No hay rectas invariantes.
 c). No hay rectas invariantes.

3.- La imagen es la elipse cuya ecuación es:

$$y^2 - 4y_1 y_2 + 5y_2^2 = 1,$$

la cual representa una elipse en el plano $Y_1 - Y_2$ que forma un cierto ángulo con el eje Y_1 .

4.- La imagen son los puntos de la recta a 45° que están entre -1 y 1 (incluyendo a -1 y 1).

8.- Recuerde que tres puntos (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) son colineales si y sólo si

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

- 9.- a) No hay planos fijos, pues su único punto fijo es $(0, 0, 0)$.
 b) Cualquier plano que pase por el origen es invariante.
 c) La imagen de la esfera unitaria es la misma esfera unitaria.

- 10.-
- a) El plano $X_1 - X_3$ es un plano fijo.
 - b) El plano $X_1 - X_2$ es un plano invariante.
 - c) La imagen es el elipsoide con vértices en $(0, 3, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, -3, 0)$, $(0, 0, -1)$, $(1, 0, 0)$, $(-1, 0, 0)$.

CAPITULO 6.

- 1.-
- | | | |
|----|------------------|--|
| a) | Valor propio | Vector propio |
| | $\lambda = 1$; | $v_1^i = [\cos\theta \quad \text{sen}\theta]$ |
| | $\lambda = 2$; | $v_2^i = [-\text{sen}\theta \quad \cos\theta]$ |
| b) | $\lambda = 1$; | $v_1^i = [9 \quad 3 \quad 2]$ |
| | $\lambda = 2$; | $v_2^i = [4 \quad 2 \quad 1]$ |
| | $\lambda = -1$; | $v_3^i = [5 \quad 1 \quad 2]$ |
| c) | $\lambda = 1$; | $v_1^i = [1 \quad 2 \quad 2]$ |
| | $\lambda = 4$; | $v_2^i = [2 \quad 1 \quad -2]$ |
| | $\lambda = 16$; | $v_3^i = [2 \quad -2 \quad 1]$ |
| d) | $\lambda = 0$; | $v_1^i = [2 \quad -1 \quad -1]$ |
| | $\lambda = 2$; | $v_2^i = [0 \quad 1 \quad -1]$ |
| | $\lambda = 3$; | $v_3^i = [1 \quad 1 \quad 1]$ |
| e) | $\lambda = 2$; | $v_1^i = [1 \quad 1 \quad -1]$ |

$\lambda = 1$ es un valor propio que ocurre como una raíz do
ble del polinomio característico y hay un sólo vector propio
 correspondiente, a saber, el $v_2^i = [1 \quad 5 \quad 3]$

- 2.- Sugerencia: ¿Cómo es el discriminante de la ecuación cuadrática que se obtiene al igualar el polinomio característico a cero?.

El resultado también es cierto para matrices de orden 3.

CAPITULO 7.

2.- a)
$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$
 b)
$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

c)
$$\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

4.- a)
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

c)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

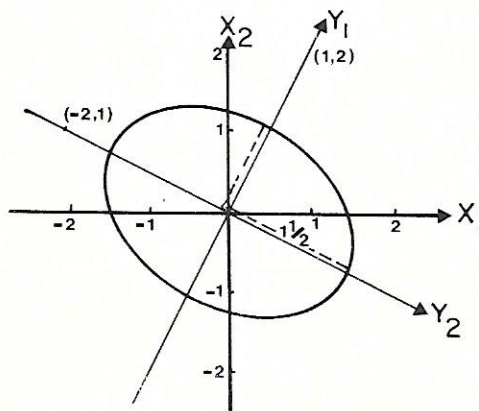
- 5.- a) $2x_2^1 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + x_3^2$
- b) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3 + 2x_2^2 - 4x_2x_3$

- 6.- Este resultado prueba que: al dar a c valores diferentes en la ecuación $x'AX = C$ obtenemos una familia de cónicas que tienen la misma forma y tienen sus ejes paralelos (coincidentes).

CAPITULO 8.

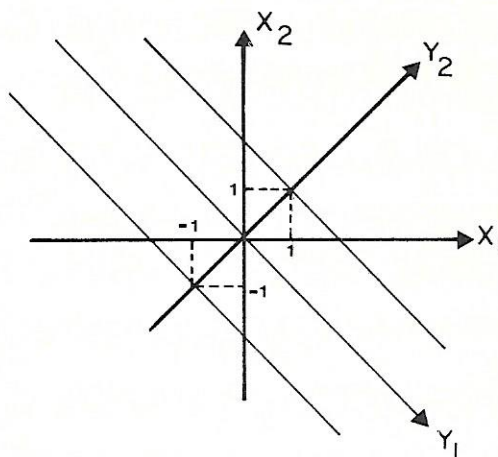
- 1.- La ecuación representa una elipse cuya ecuación en el nuevo sistema de referencia es:

$$\frac{y_1^2}{1} + \frac{y_2^2}{\frac{9}{4}} = 1$$



- 2.- La ecuación representa dos rectas paralelas cuyas ecuaciones respecto a los nuevos ejes de coordenadas son:

$$y_2 = \pm \sqrt{2}$$

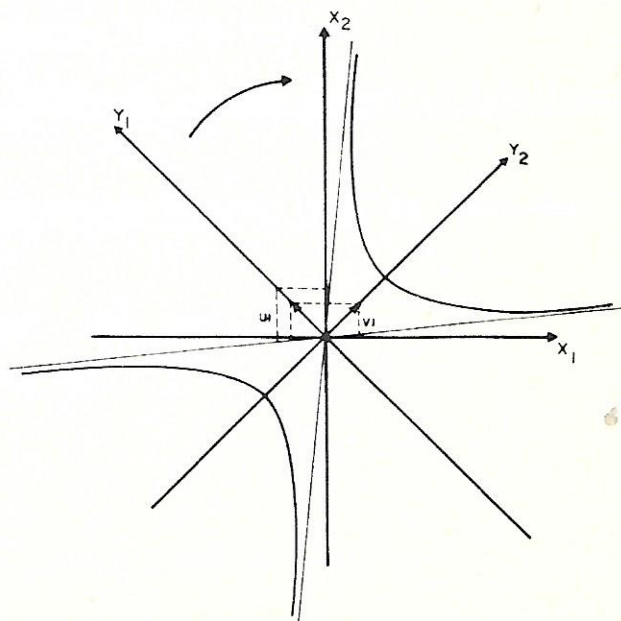


- 3.- La ecuación representa una hipérbola cuya ecuación en el nuevo sistema $y_1 - y_2$ es

$$6y_1^2 - 4y_2^2 = -12$$

o de otra manera:

$$\frac{y_2^2}{3} - \frac{y_1^2}{2} = 1$$



- 4.- La ecuación representa un elipsoide, las longitudes de los semiejes principales son

$$\frac{1}{\sqrt{4}} \quad \frac{1}{\sqrt{9}} \quad \frac{1}{\sqrt{18}} .$$

Y su ecuación en el nuevo sistema de referencia es:

$$4y_1^2 + 9y_2^2 + 18y_3^2 = 1 .$$

- 5.- La ecuación representa un cilindro elíptico cuya ecuación en los nuevos ejes es:

$$\frac{y_2^2}{3} + \frac{y_3^2}{2} = 1 .$$

- 7.- La condición necesaria y suficiente es que x, y cumplan la relación

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2} .$$